RAPPORT DE STAGE
L3 Mathématiques

Introduction aux espaces de Geoffroy

05 Janvier 2026 — 30 Janvier 2026

Sujet traité par :
M. Manuel ANNICETTE

Sous l'encadrement du :
Dr. James LARROUY,
Maître de conférences en Mathématiques

Université des Antilles - Pôle Guadeloupe
U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique

Table des matières

Introduction

Vers la fin des années 1970, Borwein, dans ses travaux, fut le premier à considérer un problème d'optimisation utilisant les applications multivoques. Par la suite, en 1981, l'auteur posera les fondations de la théorie de l'optimisation multivoque (ou *set-valued optimization,* en anglais). Cette théorie correspond à l'étude de problèmes de minimisation ou de maximisation d'une fonction objectif à valeurs ensemblistes opérant entre deux espaces vectoriels normés et dont l'espace objectif à la particularité d'être partiellement ordonné par un cône possédant diverses propriétés topologiques et géométriques. Ces dernières années, l'optimisation multivoque, s'est révélée être un domaine prolifique de recherche des mathématiques appliquées, comme le présentait déjà Jahn en 2011. En l'occurence, la mesure des risques en Finance, la logique floue, la théorie des jeux, etc., justifient le développement d'outils avancé pour l'étude des problèmes de ce domaine des mathématiques. C'est en ce sens qu'à la suite des travaux d'Hamel, de Kuroiwa et de Jahn, Geoffroy et Larrouy ont proposé de nouveaux outils construits pour l'optimisation multivoque. Ces derniers ont menés à l'introduction des espaces de Geoffroy (voir [4]) constituant l'objet d'étude de ce stage.

L'objectif de ce stage est de découvrir le métier de chercheur en Mathématiques en réalisant un travail d'étude et de recherche. Tout au long du stage, nous nous sommes intéressés aux espaces de Geoffroy ainsi qu'à leur application en optimisation, notamment.

Le rapport s'organise comme suit : dans la Section 2, nous présentons un certains nombre de notions et résultats de topologie générale et d'analyse conlinéaire utiles à la bonne compréhension du rapport. Ensuite, à la Section 3.1, nous présentons la théorie des espaces de Geoffroy et fournissons quelques résultats importants sur ces espaces. Enfin, une dernière section présente la structure d'accueil ainsi que mes impressions sur le métier de chercheur.

Notions fondamentales

Dans cette partie, nous rappelons les notions utiles à la bonne compréhension du rapport. Nous commençons par rappeler les notions de **base de voisinages** et d'**espace de Fréchet-Uryson** que le lecteur pourra retrouver dans Bourbaki [2, p. TG 1.4] et Archangel'skij [1, p.13], respectivement.

Définition 2.1 ([2])**.** Dans un espace topologique X, on appelle base de voisinages d'un élément x de X, tout ensemble $\mathbb{B}_x$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage $\mathcal{U}_x$ de x, il existe un voisinage $B \in \mathbb{B}_x$ tel que $B \subset \mathcal{U}_x$.

Définition 2.2 ([1])**.** On appelle **espace de Fréchet-Uryson** tout espace topologique X vérifiant que la fermeture de tout sous-ensemble $A \subset X$ dans X coïncide avec la fermeture séquentielle de A, définie par $[A]_{\mathrm{seq}} := \{\bar{x} \in X \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ tel que } x_n \to \bar{x}\}$, i.e. $\forall A \subset X, \overline{A} = [A]_{\mathrm{seq}}$.

Notons $Z := (Z, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé non-trivial. Dans la suite, l'ensemble des parties non-vides de Z sera notée $\mathcal{P}^\circ(Z)$. Nous commençons par rappeler les notions de préordre et de cône, utiles à la compréhension du rapport.

Définition 2.3 ([7])**.** On appelle **préordre** sur Z toute relation binaire réflexive et transitive. Une relation binaire exclusivement transitive sera appelée **préordre stricte**.

Par ailleurs, nous rappelons que l'**addition de Minkowski** de deux ensembles $A, B \in \mathcal{P}^\circ(Z)$ est définie par

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Enfin, pour tout réel $\lambda \geq 0$, la notation $\lambda A := \lambda \cdot A$ désignera la **multiplication par les scalaire positifs** avec la convention $0 \cdot A = \{0_Z\}$.

Définition 2.4 ([7])**.** On appelle **cône** de Z tout sous-ensemble $K \subseteq Z$ stable pour la multiplication par les scalaires positifs, i.e., pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda K \subseteq K$.

Nous rappelons qu'un sous-ensemble $S \subseteq Z$ est dit **convexe** dès lors que pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, la combinaison barycentrique $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est un élément de S. Toutefois, dans le cas où S est un cône, nous montrons que la convexité admet un caractérisation ensembliste.

Lemme 2.5 ([7])**.** *Un* ***cône*** *$K \subseteq Z$ est* ***convexe*** *si et seulement si $K + K \subseteq K$.*

Démonstration. Soit K un cône de Z. Supposons que K soit convexe. Alors, $tx + (1 - t)y \in K$ pour tout $x, y \in K$ et tout $t \in [0, 1]$. En particulier, pour $t = \frac{1}{2}$, on a $k := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x + y) \in K$. Or, K est un cône. Alors, on déduit donc de la Définition 2.4 que $2k = x + y \in K$, d'où $K + K \subseteq K$.
À l'inverse, supposons que $K + K \subseteq K$. Puisque c'est un cône, par définition, $\lambda K \subseteq K$ pour tout $\lambda > 0$. En particulier pour $t \in [0, 1]$ fixé : $(1 - t)K \subseteq K$ et $tK \subseteq K$. D'où $(1 - t)K + tK \subseteq K + K \subseteq K$, i.e. K est convexe. □

Dans ses travaux, Hamel [5, Définition 5] introduit le concept d'espace conlinéaire qui généralise la notion d'espace vectoriel. En fait, comme on peut le voir ci-dessous, l'axiomatique est similaire. La principale différence réside dans le fait qu'un espace conlinéaire Ω ne vérifie pas nécessairement la deuxième loi de distributivité, i.e. pour tout $a \in \Omega$ et tout $\alpha, \beta \geq 0 : (\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha a) + (\beta a)$, contrairement à un espace vectoriel réel qui doit vérifier cette loi pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Définition 2.6 (Espace Conlinéaire)**.** Soit $(\Omega, +)$, un monoïde commutatif d'élément neutre 0_Ω. Supposons que pour tout $a, b \in \Omega$ et tout $\alpha, \beta \geq 0$:

$$\alpha \cdot (\beta a) = (\alpha\beta) \cdot a \quad | \quad \alpha \cdot (a + b) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b) \quad | \quad 0 \cdot a = 0_\Omega \ \text{ et } \ 1 \cdot a = a.$$

Alors, le triplet $(\Omega, +, \cdot)$ est appelé **espace conlinéaire (réel)**.

Hamel [5, Définition 17] introduit ensuite la notion d'**espace conlinéaire préordonné** en considérant un espace conlinéaire $(\mathcal{P}^\circ(Z), +, \cdot)$ et un préordre sur $\mathcal{P}^\circ(Z)$, que nous noterons $\preceq$, compatible avec sa structure algébrique, i.e., un préordre tel que pour tout $A, B, D, E \in \mathcal{P}^\circ(Z)$ et tout $\lambda \geq 0$:

(i) $A \preceq B$ et $D \preceq E$ implique $A + D \preceq B + E$;
(ii) $A \preceq B$ implique $\lambda A \preceq \lambda B$.

Cette définition étend essentiellement le concept d'ensemble partiellement ordonné aux ensembles puissances (i.e., aux ensembles de parties d'ensembles). En 2019, Geoffroy [3] qui introduit une convergence topologique sur $\mathcal{P}^\circ(Z)$ pour les suites d'ensembles en agrégeant au concept de Hamel un préordre stricte $\prec$ associé au préordre $\preceq$. Ainsi, comme le précise Larrouy [10], pour Geoffroy [3] un espace conlinéaire est un cinq-uplet $(\mathcal{P}^\circ(Z), +, \cdot, \preceq, \prec)$ vérifiant l'axiomatique suivante : pour tout $A, B, D, E \in \mathcal{P}^\circ(Z)$ et tout $\lambda > 0$,

(a) les axiomes (i) et (ii) présentés plus hauts sont vérifiés ;
(b) $A \prec B$ implique $A \preceq B$ et $\lambda A \prec \lambda B$.

Partie 3

Les espaces de Geoffroy

Comme le commente Geoffroy [3], il n'existe pas de topologie naturelle sur $\mathcal{P}^\circ(Z)$. Afin de surpasser cette problématique, Geoffroy et Larrouy [4] ont récemment introduit une topologie sur $\mathcal{P}^\circ(Z)$ basée sur le concept d'espace conlinéaire (voir Définition 2.6). Ces espaces fournissent un cadre adapté au traitement des problèmes d'optimisation multivoques dont nous discuterons à la Section 3.3. En 2025, Larrouy [10] nomme *Espaces de Geoffroy*, toute structure conlinéaire doublement préordonnée à l'aide d'un cône convexe, fermé et d'intérieur topologique non-vide muni d'une topologie.

3.1 Construction et propriétés des espaces de Geoffroy

Désormais, à l'instar des travaux de Geoffroy et Larrouy [4], nous supposerons que Z est partiellement ordonné au moyen de l'**ordre partiel** $\leq_C$ défini part :

$$z_1 \leq_C z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad z_2 - z_1 \in C,$$

où C désigne un cône convexe, fermé et d'intérieur topologique non-vide, i.e., on a $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$. Soient $A, B \in \mathcal{P}^\circ(Z)$. On rappel que le C**-préordre inférieur** $\preceq^l_C$ **de Kuroiwa** [8] est défini par

$$A \ \preceq^l_C B \quad \Longleftrightarrow \quad B \subseteq A + C.$$

À l'aide de ce préordre, nous pouvons considérer la relation de C**-égalité inférieure** $=^l_C$ définie par

$$A \ =^l_C B \quad \Longleftrightarrow \quad A \ \preceq^l_C B \ \text{ and } \ B \ \preceq^l_C A.$$

Dans leurs travaux, Geoffroy et Larrouy [4] on introduit un préordre strict associé au C-préordre inférieur de Kuroiwa. Plus précisément, le C**-préordre strict** $\prec^l_C$ de Geoffroy et Larrouy est défini par

$$A \ \prec^l_C B \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ \varepsilon \in \mathrm{int}(C),\ A + \{\varepsilon\} \ \preceq^l_C B.$$

Notons que puisque $\mathrm{int}(C) \subset C$, $A \prec^l_C B$ implique $A \ \preceq^l_C B$.

Définition 3.1 (C-intervalle)**.** Soient $A, B \in \mathcal{P}^\circ(Z)$. On appelle C**-intervalle entre** A **et** B l'élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}^\circ(Z))$ noté $(A;B)_C$ et défini par :

$$(A;B)_C \ := \ \left\{ X \in \mathcal{P}^\circ(Z) \ \mid \ A \prec^l_C X \quad \text{et} \quad X \prec^l_C B \right\}.$$

Dès lors, on appellera **topologie de l'ordre sur les ensembles** et on note τ^C, la topologie sur $\mathcal{P}^\circ(Z)$ engendrée par la famille de tous les C-intervalles de $\mathcal{P}^\circ(Z)$. En particulier, Geoffroy et Larrouy [4, Lemme 4.1] ont montré le résultat suivant.

Lemme 3.2 ([4])**.** *Soient* $(A;B)_C$ *un* C*-intervalle et* $X \in (A;B)_C$*. Alors* $\exists \varepsilon \in \mathrm{int}(C)$ *tel que* $(X - \{\varepsilon\}; X + \{\varepsilon\})_C \subset (A;B)_C$.

Dans leur travaux, Geoffroy et Larrouy [4, Proposition 4.5] ont pu extraire un système fondamental de voisinages simple d'utilisation pour chaque élément de $\mathcal{P}^\circ(Z)$.

Proposition 3.3 ([4])**.** *Soit* $X \in \mathcal{P}^\circ(Z)$*. Alors, la famille* $\mathbb{V}_C(X) := \{(X - \{\varepsilon\}; X + \{\varepsilon\})_C \mid \varepsilon \in \mathrm{int}(C)\}$ *est une base de voisinages de* X *pour* τ^C.

Démonstration. Soit $\mathbb{B} := \{(A - \{\varepsilon\}; A + \{\varepsilon\})_C \mid A \in \mathcal{P}^\circ(Z), \varepsilon \in \mathrm{int}(C)\}$. $\mathbb{B}$ étant un ouvert de $\mathcal{P}^\circ(Z)$, on a que $\mathbb{B} \subset \tau^C$. Soient $\Omega \subset \mathcal{P}^\circ(Z)$ un ensemble τ^C-ouvert et $X \in \Omega$. La famille de tous les C-intervalles de $\mathcal{P}^\circ(Z)$ étant une base de τ^C, il existe $A, B \in \mathcal{P}^\circ(Z)$ tel que $A \prec^l_C B$ et $X \in (A;B)_C \subset \Omega$. D'après le Lemme 3.2, il existe un vecteur $\varepsilon \in \mathrm{int}(C)$ tel que $\mathcal{I} := (X - \{\varepsilon\}; X + \{\varepsilon\})_C \subset (A;B)$. Nous avons prouvé l'existence d'un élément $\mathcal{I} \in \mathbb{B}$ tel que $X \in \mathcal{I}$ et $I \subset \Omega$. Par conséquent, $\mathbb{B}$ est une base pour la topologie τ^C sur $\mathcal{P}^\circ(Z)$.
Soit $\mathcal{V}_X$ un τ^C-voisinage de $X \in \mathcal{P}^\circ(Z)$. La famille $\mathbb{B}$ étant une base pour la topologie τ^C sur $\mathcal{P}^\circ(Z)$, on en déduit qu'il existe $A \in \mathcal{P}^\circ(Z)$ et $\varepsilon \in \mathrm{int}(C)$ tel que $X \in (A - \{\varepsilon\}; A + \{\varepsilon\})_C \subset \mathcal{V}_X$. Or, d'après le Lemme 3.2, il existe $\varepsilon' \in \mathrm{int}(C)$ tel que $(X - \{\varepsilon'\}; X + \{\varepsilon'\})_C \subset (A - \{\varepsilon'\}; A + \{\varepsilon'\})_C$. Par conséquent, $(X - \{\varepsilon'\}; X + \{\varepsilon'\})_C \subset \mathcal{V}_X$ et $\mathbb{V}_C(X)$ est une base de voisinages de X pour τ^C. □

Ainsi, on appelle **espace de Geoffroy** (cf. Larrouy [10]) toute structure conlinéaire doublement préordonnée muni d'une topologie, i.e., toute structure $\mathcal{S}_C$ de la forme

$$\mathcal{S}_C := \left(\left(\mathcal{S}, +, \cdot, \preceq^l_C, =^l_C, \prec^l_C \right), \tau^C \right), \tag{1}$$

où $\mathcal{S} \in \mathcal{P}^\circ(\mathcal{P}^\circ(Z))$ et τ^C est la topologie de l'ordre sur les ensembles associée à $\left(\mathcal{S}, +, \cdot, \preceq^l_C, =^l_C, \prec^l_C \right)$.

Lemme 3.4 ([9]). *Soient $c \in C$ et $\varepsilon \in \mathrm{int}(C)$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\varepsilon}{2} - \frac{c}{N} \in C$. En particulier, on a : $\{c\} \prec_C^l \{N\varepsilon\}$, ce qui implique $N\varepsilon - c \in \mathrm{int}(C)$.*

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n := \frac{c}{n}$. Puisque $\varepsilon \in \mathrm{int}(C)$, on peut trouver un rayon $r > 0$ tel que $\mathbb{B}_r\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \subset C$. Par ailleurs, pour n assez grand, on a : $\left\|\frac{\varepsilon}{2} - c_n - \frac{\varepsilon}{2}\right\| = \|c_n\| < r$. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $\frac{\varepsilon}{2} - c_N \in C$ d'où :

$$\{0_Z\} \preceq_C^l \left\{\frac{\varepsilon}{2} - c_N\right\} \Longleftrightarrow \{c_N\} \preceq_C^l \left\{\frac{\varepsilon}{2}\right\} \implies \{c\} \prec_C^l \{N\varepsilon\} \implies \{N\varepsilon - c\} \subset \mathrm{int}(C) \Longleftrightarrow c <_C^l N\varepsilon.$$

La preuve est complète. □

Théorème 3.5 ([9]). *Tout espace de Geoffroy est à bases dénombrables de voisinages.*

Démonstration. Soient $X \in \mathscr{P}^\circ(Z)$ et $\varepsilon \in \mathrm{int}(C)$. D'après la Proposition 3.3, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathscr{V}_\varepsilon^n := \left(X - \frac{1}{n+1} \cdot \{\varepsilon\}; X + \frac{1}{n+1} \cdot \{\varepsilon\}\right)_C \in \mathbb{V}_C(X).$$

Considérons maintenant un voisinage $\mathscr{N}_X$ de X. D'après la Proposition 3.3, on peut supporter sans perte de généralité que $\mathscr{N}_X := (X - \{e\}; X + \{e\})_C$ avec $e \in \mathrm{int}(C)$. D'après le Lemme 3.4 , on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left\{\frac{u}{N+1}\right\} \prec_C^l \{e\}$. Ce qui implique que $\mathscr{V}_\varepsilon^n(X) \subseteq \mathscr{N}_X$. De plus :

$$\mathfrak{B}_\varepsilon(X) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{V}_\varepsilon^n(X) \in \mathbb{V}_C(X).$$

Finalement, en invoquant la dénombrabilité de $\mathbb{N}$, la preuve est complète. □

À travers ce théorème, Larrouy [9] a en réalité montré que tout espace de Geoffroy est **un espace séquentiel**, i.e. τ^C est définie par l'ensemble de ses suites "convergentes". D'autre part, une conséquence du Théorème 3.5 est le résultat suivant.

Théorème 3.6. *Tout espace de Geoffroy est un espace de Fréchet-Uryshon.*

3.2 Continuité des applications multivoques à valeurs dans un espace de Geoffroy

Soit $\mathscr{D}_F \subseteq X$ un ensemble non-vide. Nous rappelons qu'une **fonction multivoque** est une fonction

$$F : \mathscr{D}_F \to \mathscr{P}(Z) := \mathscr{P}^\circ(Z) \cup \{\emptyset\},$$

associant à chaque élément de $\mathscr{D}_F$ une partie de Z. Désormais, nous considérons l'espace de Geoffroy $\mathscr{P}_C(Z)$ défini par

$$\mathscr{P}_C(Z) := \left(\left(\mathscr{P}^\circ(Z), +, \cdot, \preceq_C^l, =_C^l, \prec_C^l\right), \tau^C\right).$$

On notera que dans la notation $F : \mathscr{D}_F \to \mathscr{P}_C(Z)$ implique que $\mathscr{D}_F \subseteq \mathrm{dom}(F) := \{x \in F(x) \mid F(x) \neq \emptyset\}$.

Définition 3.7 (τ^C-continuité). Une application $F : \mathscr{D}_F \to \mathscr{P}_C(Z)$ est dite **continue en** $\bar{x} \in \mathscr{D}_F$ si pour tout voisinage $\mathscr{V}_{F(\bar{x})}$ de $F(\bar{x})$, il existe un voisinage $\mathscr{U}_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$ tel que pour tout $x \in \mathscr{U}_{\bar{x}}$, $F(x) \in \mathscr{V}_{F(\bar{x})}$.
On dira que $F(\cdot)$ est continue sur l'ensemble $\mathscr{D}_F$ si elle est continue en tout point de $\mathscr{D}_F$.

Nous fournissons un exemple de fonction multivoque continue au sens de la topologie de l'ordre sur les ensembles. On rappelle qu'un processus convexe au sens de Rockafellar [11] est une application multivoque T telle que pour tout $a_1, a_2 \in A$, on a $T(a_1) + T(a_2) \subset T(a_1 + a_2)$, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $a \in A$, on a $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ et $0 \in T(0)$.

Exemple 3.8. *Soient $n \in \mathbb{N}$, la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}_+)$, $h, k \in \mathbb{R}^n$ ainsi que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \sum_{1 \le i,j \le n} m_{ij} x_i^2 x_j$. Pour tout $i,j \in \mathbb{N}$ tel que $i \neq j$, on a que $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 2m_{ij}x_i + 2m_{ji}x_j$ et $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = 2\sum_{1 \le i \le n} m_{il}x_l$ sont linéaires.*
Soient $Z = \mathbb{R}^n$, $C := \mathbb{R}_+^n$, $D := \mathbb{R}^n$ et l'application $F : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}_C(\mathbb{R})$ définie par :

$$F(a) := \{(\mathbf{H}f(a).h|k)_{\mathbb{R}^n}\} = \left\{\sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j\right\}.$$

On veut montrer que l'application F est un processus convexe $\tau^{\mathbb{R}_+}$−continu sur D. Soient $a, b \in D$,

$$F(a)+F(b) = \{(\mathbf{H}f(a).h|k)_{\mathbb{R}^n}\}+\{(\mathbf{H}f(b).h|k)_{\mathbb{R}^n}\} = \left\{\sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j + \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 f(b)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j\right\} = \left\{\sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 f(a+b)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j\right\}.$$

On a donc $F(a)+F(b)=\{(\mathbf{H}f(a+b).h|k)_{\mathbb{R}^n}\}=F(a+b)$, *en particulier* $F(a)+F(b)\subset F(a+b)$. *Soient* $a\in D$ *et* $\lambda>0$.

$$\lambda F(a)=\lambda\{(\mathbf{H}f(a).h|k)_{\mathbb{R}^n}\}=\left\{\lambda\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}h_ik_j\right\}=\left\{\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial^2 f(\lambda a)}{\partial x_i\partial x_j}h_ik_j\right\}=\{(\mathbf{H}f(\lambda a).h|k)_{\mathbb{R}^n}\}=F(\lambda a).$$

De plus, $F(0_{\mathbb{R}^n})=\{(\mathbf{H}f(0_{\mathbb{R}^n}).h|k)_{\mathbb{R}^n}\}=\left\{\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial^2 f(0_{\mathbb{R}^n})}{\partial x_i\partial x_j}h_ik_j\right\}=\{0\}$. *On donc bien que* $0\in F(0_{\mathbb{R}^n})$. *L'application* F *est donc bien un processus convexe. Montrons que le processus convexe* F *est continu sur* D. *Soit* $\bar z=(\bar a+\bar b)\in\mathbb{R}^n_+$. *Pour tout* $\varepsilon\in\operatorname{int}(\mathbb{R}_+)=]0;+\infty[$, *on a :*

$$F(\bar a-\varepsilon)=\{(\mathbf{H}f(\bar a).h|k)_{\mathbb{R}^n}-\varepsilon\}\prec^l_{\mathbb{R}_+}F(\bar a)=\{(\mathbf{H}f(\bar a).h|k)_{\mathbb{R}^n}\}$$

$$\text{et } F(\bar a)=\{(\mathbf{H}f(\bar a).h|k)_{\mathbb{R}^n}\}\prec^l_{\mathbb{R}_+}F(\bar a+\varepsilon)=\{(\mathbf{H}f(\bar a).h|k)_{\mathbb{R}^n}+\varepsilon\}.$$

On en déduit que pour tout voisinage $(F(\bar a)-\varepsilon;F(\bar a)+\varepsilon)_{\mathbb{R}_+}$ *avec* $\varepsilon\in\operatorname{int}(\mathbb{R}_+)$, *quel que soit le rayon* $r>0$ *choisi, on a que pour tout* $z\in\mathbb{B}_r(\bar z)$: $F(z)\in(F(\bar z-\varepsilon;F(\bar z)+\varepsilon)_{\mathbb{R}_+}$. *Par conséquent, le processus convexe* F *est continu sur* $\mathbb{R}^n$.

Nous proposons un autre exemple de processus convexe continu.

Exemple 3.9. *Soient* $Z=\mathbb{R}$, $C:=\mathbb{R}_+$, $D:=\mathbb{R}^2_+$ *et l'application* $F:\mathbb{R}^2_+\to\mathcal{P}_{C_p}(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$F(x,y)=[-2x-3y;4x+5y]$$

On rappelle qu'un processus convexe au sens de Rockafellar [11] est une application multivoque T *telle que pour tout* a_1, $a_2\in A$, *on a* $T(a_1)+T(a_2)\subset T(a_1+a_2)$, *pour tout* $\alpha>0$ *et pour tout* $a\in A$, *on a* $T(\alpha a)=\alpha T(a)$ *et* $0\in T(0)$.
On veut montrer que l'application F *est un processus convexe* $\tau^{\mathbb{R}_+}$*–continu sur* D. *Soit* $(x,y)\in D$. *On a :*

$$F((x,y)+(x',y'))=[-2(x+x')-3(y+y');4(x+x')+5(y+y')]$$

$$F(x,y)+F(x',y')=[-2x-3y;4x+5y]+[-2x'-3y';4x'+5y']$$

Soit $(z_1,z_2)\in F(x,y)\times F(x',y')$. *Alors,* $-2x-3y\leq z_1\leq 4x+5y$ *et* $-2x'-3y'\leq z_2\leq 4x'+5y'$.
Ce qui implique que $z_1+z_2\in F((x,y)+(x',y'))$.
Par conséquent, $\forall(x,y)\in D, F(x,y)+F(x',y')\subset F((x,y)+(x',y'))$.
Soient $\lambda>0$ *et* $(x,y)\in D$. *On a :*

$$\begin{aligned}\lambda F(x,y)&=\{\lambda z\mid z\in[-2x-3y;4x+5y]\}\\&=\{\lambda z\mid -2x-3y\leq z\leq 4x+5y\}\\&=\{w\mid -2x-3y\leq\frac{w}{\lambda}\leq 4x+5y\}\text{ en posant } w=\lambda z\\&=\{w\mid\lambda(-2x-3y)\leq w\leq\lambda(4x+5y)\}\\&=\{w\mid -2(\lambda x)-3(\lambda y)\leq w\leq 4(\lambda x)+5(\lambda y))\}\\&=F((\lambda x,\lambda y))\\&=F(\lambda(x,y))\end{aligned}$$

De plus, $0\in F((0,0))=\{0\}$. *L'application* F *est donc bien un processus convexe.*
Montrons que le processus convexe F *est* $\tau^{\mathbb{R}_+}$*–continu sur* D. *Soit* $\bar z=(\bar x,\bar y)\in D$. *Pour tout* $\varepsilon\in\operatorname{int}(\mathbb{R}_+)=\ ]0,+\infty[$, *on a :*

$$[-2\bar x-3\bar y-\{\varepsilon\};4\bar x+5\bar y-\{\varepsilon\}]\prec^l_{\mathbb{R}_+}[-2\bar x-3\bar y;4\bar x+5\bar y]$$

$$\text{et }[-2\bar x-3\bar y;4\bar x+5\bar y]\prec^l_{\mathbb{R}_+}[-2\bar x-3\bar y+\{\varepsilon\};4\bar x+5\bar y+\{\varepsilon\}]$$

On en déduit que pour tout voisinage $(F(\bar z)-\varepsilon;F(\bar z)+\varepsilon)_{\mathbb{R}_+}$ *avec* $\varepsilon\in\operatorname{int}(\mathbb{R}_+)$, *quel que soit le rayon* $r>0$ *choisi, on a que* $\forall z\in\mathbb{B}_r(\bar z)$: $F(z)\in(F(\bar z)-\varepsilon;F(\bar z)+\varepsilon)_{\mathbb{R}_+}$.
Par conséquent, le processus convexe F *est* $\tau^{\mathbb{R}_+}$*-continue sur* D.

Proposition 3.10 ([4])**.** *Soit* $F:\mathcal{D}_F\to\mathcal{P}_C(Z)$. *L'application* F *est semi-continue inférieurement en* $\bar x\in D$ *si et seulement si elle est séquentiellement continue en* $\bar x$, *i.e.* $\forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ *convergente vers* $\bar x$ *et tout* $\varepsilon\in\operatorname{int}(C)$: $F(\bar x)-\varepsilon\prec^l_C F(x_n)$, *pour* n *assez grand.*

Démonstration. Soit $\varepsilon\in\operatorname{int}(C)$. Supposons que $F(\cdot)$ soit semi-continue inférieurement en $\bar x\in X$. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{\bar x}$ de $\bar x$ tel que pour tout $x\in\mathcal{U}_x$: $F(\bar x)-\{\varepsilon\}\prec^l_C F(x)$. Considérons une suite $x_n\to\bar x$. Ainsi, pour n suffisamment grand, on a $x_n\in\mathcal{U}_{\bar x}$, d'où : $F(\bar x)-\{\varepsilon\}\prec^l_C F(x_n)$. En d'autres termes, $F(\cdot)$ est séquentiellement semi-continue inférieurement en $\bar x$. À l'inverse, si F n'est pas semi-continue inférieurement en $\bar x$, alors il existe $\bar\varepsilon\in\operatorname{int}(C)$ tel que pour tout réel $\beta>0$, on puisse trouver $x\in\mathbb{B}_\beta(\bar x)\cap D$, tel que $F(x)\notin(F(\bar x)-\{\bar\varepsilon\})^+_C$. Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $N>n$, tel que :

$$x_N\in\mathbb{B}_{\frac{1}{n}}(\bar x)\cap D,\ \text{tel que : } F(x_N)\notin(F(\bar x)-\{\bar\varepsilon\})^+_C.$$

En somme, il existe une suite x_n convergente vers $\bar x$ tel que $F(x_n)$ ne vérifie pas l'estimation : $F(\bar x)-\{\bar\varepsilon\}\prec^l_C F(x_n)$, i.e. $F(\cdot)$ n'est pas séquentiellement semi-continue inférieurement en $\bar x$. □

3.3 Optimisation conlinéaire sur les espaces de Geoffroy

L'**optimisation multivoque** est le domaine des mathématiques s'intéressant aux problèmes de minimisation ou de maximisation de fonctionnelles multivoques à valeurs dans un ensemble partiellement ordonné par un cône possédant diverses propriétés. En general, ce type de problèmes prend la forme :

$$\mathcal{SOP}(F,C,D) : \begin{cases} \text{Minimiser} & F(x), \\ \text{par rapport à} & C, \\ \text{tel que} & x \in D, \end{cases}$$

où $F : D \to \mathcal{P}^\circ(Z)$ est la **fonction objectif** et $D \subseteq \operatorname{dom} F \subseteq X$ est le **domaine admissible**. Il est courant que X soit un espace vectoriel.
Dans la littérature, on retrouve deux visions relativement distinctes du concept de solution pour les problèmes d'optimisation multivoque, chacune résultant d'une façon propre d'approcher ce type de problèmes : l'approche vectorielle et l'approche ensembliste que nous considéreons dans la suite de notre travail.

On précise que résoudre $\mathcal{SOP}(F,C,D)$ par l'approche ensembliste consiste à trouver les points $\bar{x} \in D$, appelées solutions minimales, tels que $F(\bar{x})$ possède certaines propriétés de minimalité. Cette approche repose sur la notion de famille des images de F, i.e. la famille $\mathcal{F} := \{F(\bar{x}) \mid \bar{x} \in D\}$.

Définition 3.11 (Semi-continuité inférieure). Une application $F : \mathcal{D}_F \to \mathcal{P}_C(Z)$ sera dite **semi-continue inférieurement en** $\bar{x} \in \mathcal{D}_F$ si pour tout $\varepsilon \in \operatorname{int}(C)$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{U}_{\bar{x}}$: $F(\bar{x}) \prec^l_C F(x) + \{\varepsilon\}$.
On dira que $F(\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{D}_F$ si elle l'est en tout point de $\mathcal{D}_F$.

Définition 3.12 ([10]). Soit $F : X \to \mathcal{P}^\circ(Z)$ une application multivoque. Un point $\bar{x} \in D$ est appelé solution minimale de Pareto de $\mathcal{SOP}(F,C,D)$ si avoir $x \in D$ et $F(x) \preceq^l_C F(\bar{x})$ implique $F(\bar{x}) \preceq^l_C F(x)$. On note $\mathcal{SOP}(F,C,D)$, l'ensemble des solutions minimales de Pareto.

Définition 3.13. Soit une fonction multivoque $F : D \to \mathcal{P}_{C_p}(Z)$. On appelle **ensemble de sous-niveau** de $F(\cdot)$ au niveau $y \in F(D)$, l'ensemble défini par : $\mathcal{L}^-_y(F) := \left\{x \in D \,\middle|\, F(x) \preceq^l_C \{y\}\right\}$.

Dans leurs travaux, Hernández et Rodríguez-Marín [6, Théroème 5.9], ont prouvé le résultat suivant :

Lemme 3.14. *Soient $A, B \in \mathcal{P}^\circ(Z)$ tel que A est C-fermé. Si pour tout $\varepsilon \in \operatorname{int}(C)$, on a que $A - \{\varepsilon\} \prec^l_C B$ alors $A \preceq^l_C B$.*

Théorème 3.15 (Condition suffisante pour l'existance de solutions minimales de Pareto). *Soient une fonction multivoque $F : D \to \mathcal{P}_{C_p}(Z)$ et $D \subseteq domF$ tel que D soit compact. Si pour tout $y \in F(D)$, $\mathcal{L}^-_y(F) := \left\{x \in D \,\middle|\, F(x) \preceq^l_C \{y\}\right\}$ est fermé, alors $\mathcal{P}\mathrm{Eff}(F,C,D)$ est non vide.*

Théorème 3.16 (Existance de solutions minimales de Pareto). *Soient une fonction multivoque $F : D \to \mathcal{P}_{C_p}(Z)$ et $D \subseteq domF$ tel que D soit compact. Si $F(\cdot)$ est inférieurement τ^C-semi-continue et à valeurs C-fermées sur D, alors $\mathcal{P}$Eff(F,C,D) est non vide.*

Démonstration. Soient D un ensemble compact et $F : D \to \mathcal{P}_{C_p}(Z)$, une application multivoque τ^C-semi-continue et à valeurs C-fermées sur D. Soit l'image de D par F définie par $F(D) := \bigcup_{x \in D}\{F(x)\}$.
Considérons $y \in F(D)$ et une suite $\{x_n\} \subset \mathcal{L}(y)$ telle que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} \bar{x} \in X$. D'après le Théorème 3.15, il suffit de prouver que $\bar{x} \in \mathcal{L}(y)$. Puisque $\mathcal{L}(y) \subseteq D$, on en déduit que $\bar{x} \in D$. D'après la Proposition 3.10, on a que $F(\cdot)$ est séquentiellement inférieurement τ^C-semi-continu en $\bar{x}$, i.e. pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers $\bar{x}$ et pour tout $\varepsilon \in \operatorname{int}(C)$,

$$F(\bar{x}) - \{\varepsilon\} \prec^l_C F(x_n), \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.} \tag{2}$$

En combinant (2) avec le fait que que $x_n \subset \mathcal{L}(y)$, on obtient

$$\text{pour tout } \varepsilon \in \operatorname{int}(C), F(\bar{x}) - \{\varepsilon\} \prec^l_C \{y\}. \tag{3}$$

Or, considérons $A, B \in \mathcal{P}^\circ(Z)$ avec A C-fermé. Geoffroy et Larrouy ont montré en [4, Lemme 4.10], que si $A - \{\varepsilon\} \prec^l_C B$ pour tout $\varepsilon \in \operatorname{int}(C)$, alors $A \preceq^l_C B$. Ainsi, puisque $F(\bar{x})$ est C-fermé par hypothèse, en posant $A = F(\bar{x})$ et $B = \{y\}$ on a par suite que $\bar{x} \in \mathcal{L}(y)$. On en déduit que $\mathcal{L}(y)$ est fermé dans D par caractérisation séquentielle d'un ensemble fermé. Par conséquent, $\mathcal{P}\mathrm{Eff}(F,C,D)$ est non vide. □

Exemple 3.17. *Soient $Z = \mathbb{R}^2$, $C := \mathbb{R}^2_+$, $D := [1,4]$ et l'application $F : [1,4] \to \mathcal{P}_{C_p}(\mathbb{R}^2)$ définie par :*

$$F(x) = [\ln x; \sqrt{x}] \times [2 + \sin x^2; 3 + \sin^2 x^2]. \tag{4}$$

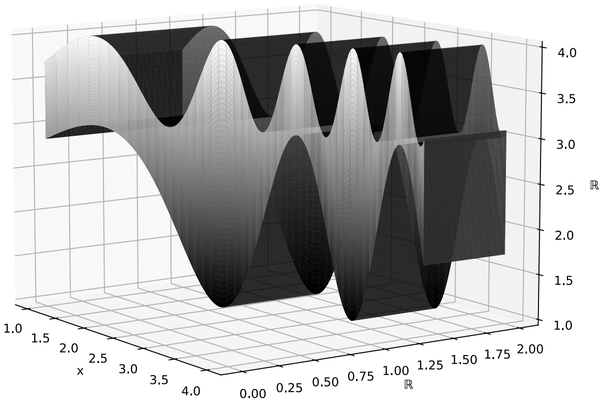

FIGURE 1 – Une visualisation numérique du graphe de F

On veut montrer que le problème d'optimisation multivoque $\mathcal{SOP}(F,\mathbb{R}^2_+,[1,4])$ *admet au moins une solution minimale de Pareto, i.e.* $\mathcal{P}Eff(F,\mathbb{R}^2_+,[1,4]) \neq \emptyset$*. On a que* $D=[1,4]$ *est bien compact. De plus,* $\forall x \in [1,4]$, $\mathrm{cl}(F(x)+\mathbb{R}^2_+) = \mathrm{cl}([\ln x;\sqrt{x}]\times[2+\sin x^2;3+\sin^2 x^2]+\mathbb{R}^2_+) = [\ln x;\sqrt{x}]\times[2+\sin x^2;3+\sin^2 x^2]+\mathbb{R}^2_+ = F(x)+\mathbb{R}^2_+$, *i.e.* F *est à valeurs* $\mathbb{R}^2_+$*-fermées sur* $[1,4]$*. Montrons que l'application* F *est* $\tau^{\mathbb{R}^2_+}$*-continue en tout point* $\bar{x}\in[1,4]$*. Soit* $\bar{x}\in[1,4]$*. Pour tout* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\mathrm{int}(\mathbb{R}^2_+)=]0,+\infty[^2$*, on a :*

$$[\ln\bar{x}-\varepsilon_1;\sqrt{\bar{x}}-\varepsilon_1]\times[2+\sin\bar{x}^2-\varepsilon_2;3+\sin^2\bar{x}^2-\varepsilon_2] \prec^l_{\mathbb{R}^2_+} [\ln\bar{x};\sqrt{\bar{x}}]\times[2+\sin\bar{x}^2;3+\sin^2\bar{x}^2]$$

$$\text{et } [\ln\bar{x};\sqrt{\bar{x}}[\times]2+\sin\bar{x}^2;3+\sin^2\bar{x}^2] \prec^l_{\mathbb{R}^2_+} [\ln\bar{x}+\varepsilon_1;\sqrt{\bar{x}}+\varepsilon_1]\times[2+\sin\bar{x}^2+\varepsilon_2;3+\sin^2\bar{x}^2+\varepsilon_2].$$

On en déduit que pour tout voisinage $(F(\bar{x})-\varepsilon;F(\bar{x})+\varepsilon)_{\mathbb{R}^2_+}$ *avec* $\varepsilon\in\mathrm{int}(\mathbb{R}^2_+)$*, quel que soit le rayon* $r>0$ *choisi, on a que* $\forall x\in\mathbb{B}_r(\bar{x}) : F(x)\in(F(\bar{x})-\varepsilon;F(\bar{x})+\varepsilon)_{\mathbb{R}^2_+}$*. Par conséquent, l'application* F *est* $\tau^{\mathbb{R}^2_+}$*-continue sur* $[1,4]$*, ce qui implique qu'elle est inférieurement* $\tau^{\mathbb{R}^2_+}$*-semi-continue sur* $[1,4]$*.*
Par suite, d'après le Théorème (3.16), $\mathcal{SOP}(F,\mathbb{R}^2_+,[1,4])$ *admet bien au moins une solution minimale de Pareto, i.e.* $\mathcal{P}Eff(F,\mathbb{R}^2_+,[1,4])\neq\emptyset$*.*

3.4 Ma première contribution aux espaces de Geoffroy

En analyse univoque, on sait que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $f:\mathcal{D}_f\to Y$ est continue sur $\mathcal{D}_f$

(b) l'image réciproque d'un ouvert $\mathcal{Y}\in\mathcal{P}(Y)$ par $F(\cdot)$ est un ouvert de $X\supset\mathcal{D}_f$.

On se propose dans cette partie d'adapter les notions d'images et d'images réciproques d'une fonction univoque, aux applications multivoques à valeurs dans un espace de Geoffroy.

Définition 3.18. Soit $F:X\to\mathcal{P}_C(Z)$. On appelle C-**image** par F de $X\subseteq\mathrm{dom}\,F$, l'ensemble défini par $F_C(X):=\{Y\in\mathcal{P}^\circ(Z)\mid\exists x\in X, F(x)=^l_C Y\}$.

Définition 3.19. Soit $F:X\to\mathcal{P}_C(Z)$. On appelle **image réciproque** par F de $Y\subseteq\mathcal{P}_C(Z)$, l'ensemble défini par $F^{-1}(Y):=\{x\in X\mid F(x)\in Y\}$.

Exemple 3.20. *Soient* $Z=\mathbb{R}^2$, $C:=\mathbb{R}^2_+$, $D:=\mathbb{R}_+$ *et l'application* $F:\mathbb{R}_+\to\mathcal{P}_C(Z)$ *définie par :*

$$F(x):=[1,4]\times[2+x;x^2+4].$$

L'image de l'ensemble $[4;6]$ *par F est* $F([4;6])=\bigcup_{x\in[4;6]}F(x)=[1;4]\times[6;36]$*.*
Déterminons la C-image de l'ensemble $[4;6]$ *par F, i.e.* $F_C([4;6]):=\{Y\in\mathcal{P}^\circ(\mathbb{R}^2_+)\mid\exists x\in[4;6],F(x)=^l_C Y\}$ *:*
Soient $Y\in\mathcal{P}^\circ(\mathbb{R}^2_+)$ *et* $x\in[4;6]$*. Alors* $\exists a,c\in\mathbb{R}_+$*,* $b,d\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$*, avec* $a<b$ *et* $c<d$ *tel que* $Y=[a;b]\times[c;d]$*.*

$$\begin{aligned} Y =^l_C F(x) &\Leftrightarrow Y \preceq^l_C F(x) \text{ et } F(x)\preceq^l_C Y\\ &\Leftrightarrow Y\subset F(x)+C \text{ et } F(x)\subset Y+C\\ &\Leftrightarrow [a;b]\times[c;d]\subset[1,4]\times[2+x;x^2+4]+\mathbb{R}^2_+ \text{ et } [1,4]\times[2+x;x^2+4]\subset[a;b]\times[c;d]+\mathbb{R}^2_+\\ &\Leftrightarrow a=1;b\geq4;c=2+x \text{ et } d\geq x^2+4.\end{aligned}$$

On en déduit que $F_C([4;6]) = \left\{[1;b]\times[2+x;d] \,\middle|\, x\in[4;6], b\geq 4 \text{ et } d\geq x^2+4\right\} = [1,+\infty[\times[6,+\infty[$.
Déterminons l'image réciproque de $\mathcal{P}^\circ(\mathbb{R})\times\mathcal{P}^\circ([3;53])$ *par* $F(\cdot)$ *:*

$$F^{-1}\left(\mathcal{P}^\circ(\mathbb{R})\times\mathcal{P}^\circ([3;53])\right) = \left\{x\in\mathbb{R}_+ \mid F(x)\in\mathcal{P}^\circ(\mathbb{R})\times\mathcal{P}^\circ([3;53])\right\} = [1;7]\subset\mathbb{R}_+.$$

Définition 3.21 (Continuité (avec l'image réciproque))**.** Une application multivoque $F : X \to \mathcal{P}_{C_p}(Z)$ est dite continue sur X si pour toute partie ouverte Ω de $\mathcal{P}_{C_p}(Z)$, l'image réciproque de Ω par F, i.e. l'ensemble $F^{-1}(\Omega)$ est une partie ouverte de X.

Théorème 3.22. *Soient* $F : X \to P_C(Z)$ *et* $\mathcal{N}_X$ *l'ensemble des parties ouvertes de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) F *est* τ^C*-continue sur* $\mathcal{D}_F$

(ii) $\forall\Omega\in\mathcal{P}^\circ(Z), \forall\varepsilon\in\operatorname{int}(C), F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C)\in\mathcal{N}_X$

Démonstration. Soient $\Omega\in\mathcal{P}^\circ(Z)$ et $\varepsilon\in\operatorname{int}(C)$. D'après la Proposition 3.3, $(\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C\in\mathbb{V}(\Omega)$ et est τ^C-ouvert. Supposons que F soit τ^C-continue sur $\mathcal{D}_F$. On considère $\bar{x}\in F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C)\subseteq\mathcal{D}_F$. Alors d'après la Définition (3.19), $F(\bar{x})\in(\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C$. Comme F est τ^C-continue en $\bar{x}$, $\exists\mathcal{U}_{\bar{x}}\in\mathcal{N}_X$ tel que pour tout $x\in\mathcal{U}_{\bar{x}}, F(x)\in(\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C$. Or, on a :

$$F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C) = \{x\in X \mid F(x)\in(\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C\}.$$

D'où $\mathcal{U}_{\bar{x}}\subseteq F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C)$. Par conséquent, $F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C)\in\mathcal{N}_X$.
On en déduit que $\forall\Omega\in\mathcal{P}^\circ(Z), \forall\varepsilon\in\operatorname{int}(C), F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C)\in\mathcal{N}_X$.
À l'inverse, considérons $\bar{x}\in\mathcal{D}_F$ et supposons que $\forall\Omega\in\mathcal{P}^\circ(Z), \forall\varepsilon\in\operatorname{int}(C), F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C)\in\mathcal{N}_X$. Soit $\varepsilon\in\operatorname{int}(C)$. Alors, on a en particulier pour $\Omega = F(\bar{x})\in\mathcal{P}^\circ(Z)$:

$$F^{-1}((F(\bar{x})-\{\varepsilon\};F(\bar{x})+\{\varepsilon\})_C)\in\mathcal{N}_X.$$

En d'autres termes $F^{-1}((F(\bar{x})-\{\varepsilon\};F(\bar{x})+\{\varepsilon\})_C)$ est un ouvert de $\mathcal{D}_F$, et comme $\bar{x}\in\mathcal{D}_F$, $\exists\mathcal{U}_{\bar{x}}$ tel que $\mathcal{U}_{\bar{x}}\subseteq F^{-1}((F(\bar{x})-\{\varepsilon\};F(\bar{x})+\{\varepsilon\})_C)$. D'où :

$$\forall x\in\mathcal{U}_{\bar{x}}, x\in F^{-1}((F(\bar{x})-\{\varepsilon\};F(\bar{x})+\{\varepsilon\})_C) \Longleftrightarrow F(x)\in(F(\bar{x})-\{\varepsilon\};F(\bar{x})+\{\varepsilon\})_C.$$

On en déduit que pour tout $\bar{x}\in\mathcal{D}_F, \exists\mathcal{U}_{\bar{x}}$ tel que pour tout $x\in\mathcal{U}_{\bar{x}}$, $F(x)\in(F(\bar{x})-\{\varepsilon\};F(\bar{x})+\{\varepsilon\})_C$. Par conséquent, F est τ^C-continue sur $\mathcal{D}_F$. □

Exemple 3.23. *Soit* $Z := \mathbb{R}_+, C := \mathbb{R}_+, D := \mathbb{R}$ *et l'application* $F : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}_C(Z)$ *définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} [\ln x; 2x+7] & \text{si } x\in[1;+\infty[,\\ \{\cos|x|\} & \text{si } x\in\,]-\infty;1[. \end{cases}$$

On veut montrer que l'application F n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$ *en appliquant la réciproque du Théorème 3.22, i.e. :*

$$F \text{ n'est pas continue sur } \mathcal{D}_F \Leftrightarrow \exists\Omega\in\mathcal{P}^\circ(Z), \exists\varepsilon\in\operatorname{int}(C), F^{-1}((\Omega-\{\varepsilon\};\Omega+\{\varepsilon\})_C)\notin\mathcal{N}_X.$$

Considérons $\bar{x} := 1\in\mathcal{D}_F$, $\bar{\varepsilon} := 1\in\operatorname{int}(\mathbb{R}_+)$ *et* $\Omega = F(\bar{x})\in\mathcal{P}^\circ(Z)$*. On a :*

$$F^{-1}((F(\bar{x})-\{\bar{\varepsilon}\};F(\bar{x})+\{\bar{\varepsilon}\})_{\mathbb{R}_+}) = F^{-1}(([\ln\bar{x}-\bar{\varepsilon};2\bar{x}+7-\bar{\varepsilon}];[\ln\bar{x}+\bar{\varepsilon};2\bar{x}+7+\bar{\varepsilon}])_{\mathbb{R}_+}) = F^{-1}(([-1;9];[1;10])_{\mathbb{R}_+}) = [1;\frac{3}{2}]\notin\mathcal{N}_X.$$

Par conséquent, d'après le Théorème 3.22, $F(\cdot)$ *n'est pas continue sur* $\mathcal{D}_F$*.*

Conclusion

Nous clôturons ce rapport par une présentation de la structure d'accueil du stage, une synthèse du travail effectué ainsi que mes impressions sur le métier d'enseignant-chercheur.

4.1 La structure d'accueil

Mon stage s'est déroulé au laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications, communément appelé LAMIA, correspondant à l'unité de recherché (UR1_1) de l'Université des Antilles. Ledit laboratoire compte à ce jour une soixantaine de membres, répartis en une trentaine de membres permanents, à savoir les Maîtres de conférences et Professeurs des Universités, ainsi que les membres temporaires, notamment des doctorants et des ATER. Le LAMIA est organisé en huits groupes thématiques tels que le CAVA, un de ceux dédiés aux Mathématiques, notamment l'Optimisation, le LIA, un de ceux dédiés à l'informatique en Intelligence artifcielle et le GRATIN qui est à la croisée de plusieurs disciplines. Au sein du laboratoire, les recherches dans le domaine des Mathématiques se concentrent en particulier sur le contrôle optimal, l'optimisation, la modélisation, l'analyse des équations aux dérivées partielles, les problèmes inverses et la topologie générale.

4.2 Synthèse du travail effectué

Au cours de ce stage, nous avons pu étudier les fondements des Espaces de Geoffroy ainsi que certaines de leurs applications en analyse multivoque et en optimisation, à l'aide d'articles scientifiques sur le sujet ainsi que des livres de topologie générale. Dans la suite, nous avons pu apporter notre contribution aux Espaces de Geoffroy par l'adaptation de concepts et d'un résultat d'analyse univoque à l'analyse multivoque compatible avec les Espaces de Geoffroy.

4.3 Mes impressions sur le métier d'enseignant-chercheur

Vivre ce stage m'aura permis d'en apprendre davantage sur le métier d'enseignant-chercheur. En l'occurrence, j'ai pu me rendre compte qu'il s'agit d'un métier exigeant, nécessitant une grande rigueur, des qualités certes intellectuelles mais aussi humaines de collaboration, de remise en question et de patience. La recherche est d'une part, selon moi, une activité passionnante, une source d'enrichissement intellectuel, lors de la phase de documentation et l'élaboration d'une bibliographie. Mais aussi de réflexion, de questionnement et de création pour apporter, aussi modeste qu'elle soit, notre pierre à l'édifice scientifique. Enfin, vient le moment de la transmission, avec la rigueur scientifique et les normes académiques de rédaction qui s'imposent, de ce que l'on apporte mais aussi de ce que l'on a reçu et compris de ceux qui nous ont précédé et avec qui, le cas échéant on a pu collaborer. De mon point de vue, le trait d'union entre enseignant et chercheur est la condition *sine qua non* nous ne pourrions continuer à élever l'édifice des connaissances mathématiques dont la construction nous a précédé et continuera avec les générations futures.

4.4 Remerciements

Je tiens à remercier mon tuteur, le Dr. James Larrouy de m'avoir permis de vivre ce stage plus qu'enrichissant intellectuellement et humainement, sous son encadrement. En l'occurrence, tout au long du stage, le Dr. James Larrouy a su m'encourager, faire preuve d'une grande patience, se rendre régulièrement disponible, me donner de précieux conseils pour acquérir de nouvelles compétences, gagner en autonomie et faire grandir mon goût pour les Mathématiques. Avec lui, j'ai pu me rendre compte qu'être enseignant-chercheur, plus qu'un métier, c'est une véritable vocation au service du développement des connaissances mathématiques et de leur transmission.

Bibliographie

[1] Archangel'skij, A. V. (1990). *General Topology I : Basic Concepts and Constructions Dimension Theory*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[2] Bourbaki, N. (2007). *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, réimpression inchangée de l'édition de 1971 édition.

[3] Geoffroy, M. H. (2019). A topological convergence on power sets well-suited for set optimization. *Journal of Global Optimization*, 73(3):567–581.

[4] Geoffroy, M. H. et Larrouy, J. (2022). A new topological framework and its application to well-posedness in set-valued optimization. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 43(16):1848–1883.

[5] Hamel, A. (2005). *Variational principles on metric and uniform spaces*. Thèse de doctorat, Halle (Saale), Univ., Habil.-Schr.

[6] Hernández, E. et Rodríguez-Marín, L. (2007). Existence theorems for set optimization problems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 67(6):1726–1736.

[7] Jahn, J. (2011). *Vector Optimization : Theory, Applications, and Extensions*. SpringerLink Bücher. Berlin, Heidelberg.

[8] Kuroiwa, D. (1997). Some criteria in set-valued optimization (nonlinear analysis and convex analysis). *RIMS Kokyuroku*, 985:171–176.

[9] Larrouy, J. (2024). *Topologie dédiée à l'optimisation multivoque et contrôle optimal de quelques EDP paraboliques*. Thèse de doctorat, Université des Antilles.

[10] Larrouy, J. (2026). Pareto well-posedness for set-valued optimization problems in geoffroy spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 208(1):1–52.

[11] Rockafellar, R. T. (1977). *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, Princeton.