



RAPPORT DE STAGE  
L3 MATHÉMATIQUES

---

Sur le théorème de Brouwer  
et son application en économie

---

06 JANVIER 2025 — 31 JANVIER 2025

Sujet traité par :

M. MALCOLM CÉLESTIN

Sous l'encadrement du:

DR. JAMES LARROUY

UNIVERSITÉ DES ANTILLES - PÔLE GUADELOUPE  
U.F.R. SCIENCES EXACTES ET NATURELLES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



# Sommaire

|          |                                                                       |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Éléments de topologie dans les espaces vectoriels normés</b>       | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Projection sur un ensemble de Tchebychev</b>                       | <b>4</b>  |
| 3.1      | Sur les ensembles de Tchebychev . . . . .                             | 5         |
| 3.2      | Sur la continuité de l'opérateur de projection . . . . .              | 6         |
| <b>4</b> | <b>Le théorème du point fixe de Brouwer</b>                           | <b>7</b>  |
| 4.1      | Sur les degrés topologiques . . . . .                                 | 7         |
| 4.2      | Théorèmes de point fixe dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .                 | 8         |
| <b>5</b> | <b>Application à l'économie</b>                                       | <b>9</b>  |
| 5.1      | Position du problème . . . . .                                        | 10        |
| 5.2      | Existence d'un prix d'équilibre pour un problème auxiliaire . . . . . | 11        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion</b>                                                     | <b>11</b> |

# 1 Introduction

Le théorème de Brouwer est un résultat majeur en topologie algébrique qui complète la grande famille des théorèmes de points fixes. L'idée de Brouwer proviendrait de l'observation d'une tasse de café par Brouwer. En effet, quand on mélange son sucre, il semble qu'il y ait toujours un point immobile. Il en déduit que : "À tout moment, il y a un point de la surface qui n'aura pas changé de place".

Motivés par les travaux de son époque sur les équations différentielles, Henri Poincaré (1854 – 1912) étudie une question analogue à celle du mouvement de la surface d'une tasse de café : "Que peut-on dire, en général, des trajectoires d'une surface animée par un courant constant?" Il découvre que la réponse réside dans ce que l'on appelle maintenant les propriétés topologiques de la zone contenant la trajectoire. Si cette zone est compacte, c'est-à-dire à la fois fermée et bornée, soit la trajectoire s'immobilise, soit elle s'approche de plus en plus d'une boucle qu'elle parcourt indéfiniment. Poincaré va plus loin, si la zone est de même nature que celle d'un disque, comme c'est le cas pour la tasse de café, il existe nécessairement un point fixe. Brouwer étend le résultat à toute dimension finie en 1912. Ce théorème présente de nombreux intérêts. Il permet notamment d'établir des résultats d'existence de solutions d'équations différentielles et aux dérivées partielles, mais on le retrouve aussi dans des domaines plus inattendus comme dans la théorie des jeux de John Nash [5].

L'objectif de ce stage était de découvrir le métier de chercheur en mathématiques à travers un travail d'étude et de recherche (TER). Il s'agissait pour moi de construire un rapport sous la forme d'un mémoire de recherche qui respecterait les standards académiques des articles scientifiques modernes. Ce travail se place dans le cadre des mathématiques et applications des mathématiques. Plus précisément, il s'agissait de comprendre l'énoncé et les enjeux du théorème du point fixe de Brouwer, d'en présenter une preuve complète et rigoureuse, et d'en illustrer une application en économie.

Le rapport s'organise de la façon suivante : à la Section 2, nous présentons quelques résultats généraux relatifs à la topologie des espaces vectoriels normés. Cette partie nous permet d'introduire les notations et concepts que nous utiliserons tout au long de notre étude. Ensuite, à la Section 3, nous nous intéressons à la notion d'ensemble de Tchebychev. Nous présentons quelques résultats de caractérisation pour ces ensembles puis nous étudions la continuité de l'opérateur de projection sur un ensemble de Tchebychev. À la Section 4, nous nous focalisons sur le théorème de point fixe de Brouwer. Dans un premier temps, nous présentons quelques résultats sur les degrés topologiques en utilisant des outils de topologie algébrique. Nous prouvons ensuite deux théorèmes de points fixes dont le théorème de Brouwer à l'aide des résultats obtenus précédemment. Enfin, à la Section 5, on considère un problème d'équilibre provenant de la microéconomie que l'on étudie. En particulier, on prouve l'existence d'un point d'équilibre pour ce problème grâce au théorème de point fixe de Brouwer.

## 2 Éléments de topologie dans les espaces vectoriels normés

Au sein de cette partie, nous rappelons les notions classiques sur lesquels repose notre travail. Considérons un espace vectoriel  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous commençons par rappeler la notion de norme.

**Définition 2.1 (Norme).** Une **norme** sur  $E$  est une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $x, y \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(i) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad (\text{homogénéité})$$

$$(ii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$(iii) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0_E. \quad (\text{séparation})$$

La **distance**  $d(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  de  $E$  est définie par  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Désormais,  $E := (E, \|\cdot\|)$  désignera un *espace vectoriel normé* (e.v.n) réel, où  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ . Dans l'ensemble du mémoire, les notations

$$\mathcal{B}(x, r) := \{y \in E, \|x - y\| < r\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{B}}(x, r) := \{y \in E, \|x - y\| \leq r\}, \quad (1)$$

représenteront respectivement les boules ouverte et fermée de  $E$  centrées en  $x \in E$  et de rayon  $r > 0$ . Ainsi, les frontière et adhérence des boules introduites en (1) sont respectivement définies par

$$\partial \mathcal{B}(x, r) := \overline{\mathcal{B}}(x, r) \setminus \mathcal{B}(x, r) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{B}(x, r)} := \mathcal{B}(x, r) \cup \partial \mathcal{B}(x, r).$$

De façon générale, les concepts d'ouverts, de fermés et de bornés se définissent comme suit.

**Définition 2.2 (Partie ouverte, fermée et bornée de  $\mathbb{R}^n$ ).** Une partie  $\Omega \subseteq E$  est dite :

- (a) **ouverte** si pour tout  $x \in \Omega$ , il existe  $r > 0$  tel que  $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$  ;
- (b) **fermée** si son complémentaire dans  $E$  (i.e. l'ensemble  $E \setminus \Omega$ ) est ouvert ;
- (c) **bornée** s'il existe  $r > 0$  tel que  $A \subset \mathcal{B}(0_E, r)$ .

**Remarque 2.3.** L'ensemble des ouverts tels que définis au point (a) de la Définition 2.2 constitue une topologie appelée **topologie de la norme**. On considérera désormais les espaces vectoriels normés considérés comme munis de cette dernière.

Enfin, nous rappelons la notion d'ensemble compact.

**Définition 2.4 (Ensemble compact).** Un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est dit **compact** si de tout recouvrement ouvert de  $A$ , on peut en extraire un recouvrement fini. En d'autres termes,  $A$  est compact lorsque pour tout recouvrement ouvert  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  de  $A$ , il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que  $A \subset \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_j$ .

Nous listons deux résultats de caractérisation de la compacité dans  $\mathbb{R}^n$  qui seront utilisés dans la suite.

**Théorème 2.5 (Théorème de Borel-Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ ).** Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est compact si et seulement s'il est borné et fermé.

**Théorème 2.6 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans  $\mathbb{R}^n$ ).** Un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est compact si et seulement si de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments  $x_n \in A$ , on peut extraire une sous-suite  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente vers un élément  $\bar{x} \in A$ .

Soient  $F := (F, \|\cdot\|_F)$  un espace vectoriel normé muni de la topologie de la norme et  $D \subseteq E$  un sous-ensemble non vide muni de la topologie induite. Si  $\mathcal{B}_F(y, r)$  désigne la boule ouverte centrée en  $y \in F$  et de rayon  $r > 0$ , alors la continuité d'une application  $f : D \rightarrow F$  se caractérise de la façon suivante.

**Théorème 2.7 (Continuité locale).** Soit  $f : D \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est **continue en**  $x_0 \in D$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad f(D \cap \mathcal{B}(x_0, \alpha)) \subset \mathcal{B}_F(f(x_0), \varepsilon).$$

Lorsque  $f$  est continue en tout point de  $D$ , on dit que  $f$  est **continue (sur  $D$ )**.

Nous rappelons une autre caractérisation de la notion de continuité.

**Théorème 2.8 (Caractérisation séquentielle de la continuité).** Soit  $f : D \rightarrow F$  une application. Alors  $f$  est continue en  $x_0 \in D$  si, et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $D$  convergeant vers  $x_0$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(x_0)$ .

Enfin, si  $G := (G, \|\cdot\|_G)$  désigne un espace vectoriel normé, alors le résultat suivant est valide.

**Proposition 2.9 (Stabilité de la continuité par composition).** Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications continues. Alors, la composée  $g \circ f : E \rightarrow G$  est continue.

### 3 Projection sur un ensemble de Tchebychev

Dans  $\mathbb{R}^n$ , la convexité est un outil important et puissant pour étudier les opérateurs de projections. Nous commençons par rappeler le concept d'ensemble convexe.

**Définition 3.1 (Convexité).** Une partie  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite **convexe** si, pour tout  $x, y \in C$  et tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(1 - t)x + ty \in C$ .

Nous fournissons ci-après quelques exemples d'ensembles convexes.

**Lemme 3.2.** Soient  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . Les assertions suivantes sont valides :

- (a)  $\overline{\mathcal{B}}(x, r)$  et  $\mathcal{B}(x, r)$  sont convexes ;
- (b) Si  $A$  et  $B$  sont convexes, alors leur somme de Minkowski  $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  est également convexe. En particulier, le translaté  $A + \{x\}$  est convexe.

*Proof.* (a) Montrons que  $\mathcal{B}(x, r)$  est convexe. Considérons deux points  $y, z \in \mathcal{B}(x, r)$ . Alors, pour  $t \in \{0; 1\}$ , on a  $(1-t)y + tz \in \mathcal{B}(x, r)$ . Supposons maintenant que  $t \in ]0, 1[$ . On a :

$$\|x - ((1-t)y + tz)\| = \|(1-t)(x-y) + t(x-z)\| \leq (1-t)\|x-y\| + t\|x-z\|.$$

Or,  $\|x-z\| < r$ . Donc  $t\|x-z\| < tr$ . De même, puisque  $1-t > 0$  et puisque  $\|x-y\| < r$ , il vient que  $(1-t)\|x-y\| < (1-t)r$ . Finalement,  $\|x - ((1-t)y + tz)\| < (1-t)r + tr = r$ , i.e.  $(1-t)y + tz \in \mathcal{B}(x, r)$ . La preuve de la convexité de  $\overline{\mathcal{B}}(x, r)$  se fait de manière analogue avec des inégalités larges.

(b) Pour tout  $a_1, a_2 \in A$ , tout  $b_1, b_2 \in B$  et tout  $t \in [0, 1]$ , la convexité de  $A$  donne  $(1-t)a_1 + ta_2 \in A$ , et celle de  $B$  conduit à  $(1-t)b_1 + tb_2 \in B$ . Or,

$$(1-t)(a_1 + b_1) + t(a_2 + b_2) = [(1-t)a_1 + ta_2] + [(1-t)b_1 + tb_2],$$

d'où  $(1-t)(a_1 + b_1) + t(a_2 + b_2) \in A + B$ . □

### 3.1 Sur les ensembles de Tchebychev

Nous définissons maintenant un concept fondamental pour la suite de notre étude.

**Définition 3.3 (Ensembles de Tchebychev).** *Un sous-ensemble  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  est dit de Tchebychev si pour tout  $x \notin K$ , il existe un unique  $y \in K$  tel que*

$$d(x, y) = d(\{x\}, K), \quad (2)$$

où  $d(\{x\}, K) = \inf_{z \in K} \|x - z\|$ , désigne la distance entre le point  $x$  et l'ensemble  $K$ .

**Exemple 3.4.** Soit  $K := \overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$ . Alors,  $K$  est un ensemble de Tchebychev. En revanche, la frontière  $\partial K = \partial \mathcal{B}(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$  n'est pas un ensemble de Tchebychev puisque  $0_{\mathbb{R}^n}$  est équidistant à tous les points de  $\partial K$ , i.e.  $d(\{0_{\mathbb{R}^n}\}, \partial K) = 1 = \|x\|$ , pour tout  $x \in \partial K$ .

Nous montrons que si  $K$  est fermé, alors pour tout  $x \notin K$ , l'équation (2) possède au moins une solution.

**Lemme 3.5.** Soient  $F \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble fermé non vide et  $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ . Alors, il existe  $\bar{y} \in F$  tel que

$$d(x, \bar{y}) = d(\{x\}, F).$$

*Preuve.* Posons  $\delta = d(\{x\}, F)$ . Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on peut construire une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\delta \leq d(x, y_n) \leq \delta + \frac{1}{n+1}. \quad (3)$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n \in F \cap \overline{\mathcal{B}}(x, \delta+1)$ . Posons  $C = F \cap \overline{\mathcal{B}}(x, \delta+1)$ . Ainsi,  $C$  est une intersection de fermés donc  $C$  est un fermé. De plus, on a  $C \subset \overline{\mathcal{B}}(x, \delta+1) \subset \mathcal{B}(0_{\mathbb{R}^n}, \|x\| + \delta+2)$ , d'où  $C$  est borné. Par conséquent, d'après le Théorème 2.5,  $C$  est compact. En invoquant le Théorème 2.6, on peut trouver une sous-suite  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers un point  $\bar{y} \in C$  quand  $k$  tend vers l'infini. D'après (3), pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\delta \leq \|x - y_{n_k}\| \leq \delta + \frac{1}{n_k+1}$ . En passant à la limite sur  $k$ , on déduit que  $\|x - \bar{y}\| = \delta$ . Ainsi, nous avons exhibé un vecteur  $\bar{y} \in F$  vérifiant  $d(x, \bar{y}) = d(\{x\}, F)$ . □

On démontre alors un théorème permettant de caractériser la projection sur un convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 3.6.** Si  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  est convexe et fermé, alors  $K$  est un ensemble de Tchebychev.

*Preuve.* Soit  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ . Puisque  $K$  est fermé, le Lemme 3.5 justifie l'existence d'un point  $y \in K$  vérifiant

$$d(x, y) = \inf_{z \in K} \|x - z\|. \quad (4)$$

Supposons qu'il existe deux points  $y_1, y_2 \in K$  vérifiant (4) tels que  $y_1 \neq y_2$ . Alors par hypothèse,  $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\|$ . En se référant à la convexité de  $K$ , on a  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in K$ . De plus, en utilisant l'identité du parallélogramme, on a :

$$\left\| \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2}(y_1 - x) + \frac{1}{2}(y_2 - x) \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|y_1 - x\|^2 + \|y_2 - x\|^2) - \frac{1}{4} \|y_1 - y_2\|^2. \quad (5)$$

Ainsi, puisque  $-\frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2 < 0$  (par hypothèse  $y_1 \neq y_2$ ), d'après (5), on a :

$$\left\| \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x \right\|^2 < \frac{1}{2} (\|y_1 - x\|^2 + \|y_2 - x\|^2). \quad (6)$$

En utilisant à nouveau nos hypothèses, l'estimation (6) devient :

$$\left\| \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x \right\|^2 < \|y_1 - x\|^2 \quad \left( \text{et} \quad \left\| \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x \right\|^2 < \|y_2 - x\|^2 \right),$$

ce qui contredit le fait que  $y_1$  et  $y_2$  vérifient (4).  $\square$

**Remarque 3.7.** En réalité, le Théorème 3.6 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie de  $\mathbb{R}^n$  soit un ensemble de Tchebychev. Pour une démonstration formelle que tout sous-ensemble de Tchebychev de  $\mathbb{R}^n$  est convexe, nous renvoyons à Deutsch [1, p. 38]. On montre aussi que tout ensemble de Tchebychev est fermé (voir Proposition 3.8).

**Proposition 3.8.** Les ensembles de Tchebychev sont fermés.

*Preuve.* On sait que  $K \subset \overline{K}$ . Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $x \in \overline{K}$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $y_\varepsilon \in K$  tel que  $0 \leq \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$ . D'où  $d(\{x\}, K) = 0$ . Or,  $K$  est un ensemble de Tchebychev, donc il existe  $y \in K$  tel que  $\|x - y\| = d(\{x\}, K)$ , soit  $\|x - y\| = 0$ . Par propriété de séparation de la norme, on en déduit que  $x = y$  et  $x \in K$ .  $\square$

### 3.2 Sur la continuité de l'opérateur de projection

Nous définissons la notion de projection sur un ensemble de Tchebychev qui interviendra par la suite.

**Définition 3.9 (Projection sur un ensemble de Tchebychev).** Soit  $K$  un ensemble de Tchebychev et  $x \in \mathbb{R}^n$ . On définit le projeté de  $x$  sur  $K$ , noté  $\text{Proj}_K(x)$ , par :

$$\text{Proj}_K(x) = y \quad \text{si} \quad d(x, y) = d(\{x\}, K). \quad (7)$$

**Remarque 3.10.** L'application  $\text{Proj}_K(\cdot)$  introduite en (7) est bien définie quand  $K$  est un ensemble de Tchebychev. En d'autres termes, il existe un et un seul élément dans  $K$  à distance (Euclidienne) minimale de  $x \in \mathbb{R}^n$  (cf. Hiriart-Urruty [3, pp. 220]).

On démontre alors que cet opérateur de projection est continu.

**Proposition 3.11.** Si  $K$  est un ensemble de Tchebychev, alors l'application  $\text{Proj}_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$  est continue.

*Preuve.* Considérons une paire de suites  $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \mathbb{R}^n \times K$  et un couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times K$  tels que  $(x_n)$  converge vers  $x$ ,

$$\text{Proj}_K(x) = y \quad \text{et} \quad \text{Proj}_K(x_n) = y_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

On montre que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dans un compact à partir d'un certain rang, et qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Observons que par définition de la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a :

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, y), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Par ailleurs, puisque  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ , en combinant l'inégalité triangulaire à (9) on a :

$$d(x, y_n) - \frac{1}{n} \leq d(x_n, y_n) \leq d(x_n, y) \leq d(x, y) + \frac{1}{n}, \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

On déduit des inégalités précédentes que  $y_n \in K \cap \overline{B}(x, 1 + d(x, y))$  pour  $n$  assez grand. Notons que d'après le Théorème 2.5,  $K \cap \overline{B}(x, 1 + d(x, y))$  est compact. Ainsi, en invoquant le Théorème 2.6, on peut extraire une sous-suite  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente vers un point  $\bar{y} \in K$ . En passant à la limite dans (9), il vient que :

$$d(x, \bar{y}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{n_k}, y) = d(x, y). \quad (10)$$

Or, par définition,  $d(x, y) \leq d(x, \bar{y})$ , ce qui couplé à l'estimation (10) donne  $d(x, \bar{y}) = d(x, y)$ . On a donc nécessairement  $\bar{y} = y$ , i.e. la sous-suite  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y$ . Enfin, en observant que si on choisit une autre suite extraite  $(y_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$  de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , elle convergera aussi vers  $y$ , on déduit que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $y$ . Ainsi,  $\text{Proj}_K$  est séquentiellement continue. On conclut en invoquant le Théorème 2.8.  $\square$

## 4 Le théorème du point fixe de Brouwer

Dans la suite,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  désignera toujours un ouvert borné non vide. Les notations  $\bar{\Omega}$  et  $\partial\Omega$  symboliseront la fermeture et la frontière de l'ensemble  $\Omega$ . Enfin,  $Id_{\bar{\Omega}}$  dénotera l'application identité  $Id_{\bar{\Omega}} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ , i.e.  $Id_{\bar{\Omega}}(x) = x$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ .

Pour un ouvert borné  $\Omega$  et une fonction  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue donnés, on s'intéresse au problème

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \text{Trouver} & x_0 \in \bar{\Omega}, \\ \text{tel que} & f(x_0) = x_0. \end{cases} \quad (11)$$

On dit que  $(\mathcal{P})$  est un **problème de point fixe**. Dans la suite, on étudie des résultats d'existence pour  $(\mathcal{P})$ . En particulier, nous chercherons à montrer le Théorème de Brouwer (voir Théorème 4.12). Nous faisons le choix d'utiliser la notion de degré topologique pour démontrer ce résultat. En somme, les degrés topologiques sont des opérateurs qui permettent essentiellement de quantifier le nombre de solutions du problème  $(\mathcal{P})$ . Nous commençons donc avec un peu de théorie sur le sujet.

### 4.1 Sur les degrés topologiques

Considérons  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  l'espace des applications continues  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  muni de la norme du sup, i.e.

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|f(x)\|.$$

**Remarque 4.1.** D'après le Théorème de Borel-Lebesgue (voir Théorème 2.5),  $\bar{\Omega}$  est compact. Ainsi, la norme ci-dessus est bien définie. Par ailleurs, on pourrait montrer que  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  est un Banach.

Focalisons nous sur le sous-ensemble de  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , que nous notons  $\mathcal{K}(\bar{\Omega})$ , défini par

$$\mathcal{K}(\bar{\Omega}) = \{f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \mid 0_{\mathbb{R}^n} \notin f(\partial\Omega)\}. \quad (12)$$

Nous commençons par montrer les résultats suivants :

**Proposition 4.2.** Si  $f \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$ , alors il existe  $m > 0$  tel que  $\|f(x)\| \geq m$ , pour tout  $x \in \partial\Omega$ .

*Preuve.* Considérons l'application  $a(x) = \|f(x)\|$ . Comme  $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $a \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ . Puisque  $\Omega$  est un ouvert borné, on déduit du Théorème 2.5 que sa frontière  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \cap (\mathring{\mathbb{R}^n} \setminus \bar{\Omega})$  est un compact et on obtient que  $a(\partial\Omega)$  est un compact et donc que  $a(\partial\Omega)$  est borné. En particulier, puisque  $f \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$ ,  $a(x) > 0$  pour tout  $x \in \partial\Omega$ . Finalement, d'après le Théorème des valeurs extrêmes, on peut trouver  $x_0 \in \bar{\Omega}$  tel que  $0 < m = a(x_0) \leq a(x) = \|f(x)\|$ , pour tout  $x \in \partial\Omega$ .  $\square$

Notons désormais  $\mathcal{B}_{\mathcal{K},\infty}(f,r)$  désignera la boule ouverte de  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  centrée en  $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  et de rayon  $r > 0$ . Ainsi, nous sommes en mesure de montrer le résultat suivant.

**Proposition 4.3.** L'ensemble  $\mathcal{K}(\bar{\Omega})$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ .

*Preuve.* Soit  $g \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$ . On montre qu'il existe un rayon  $r_g > 0$  tel que  $\mathcal{B}_{\mathcal{K},\infty}(g,r_g) \subset \mathcal{K}(\bar{\Omega})$ . Notons que d'après la Proposition 4.2, il existe  $m > 0$  tel que  $\|g(x)\| \geq m$ , pour tout  $x \in \partial\Omega$ . Prenons  $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{K},\infty}(g,m)$ . Alors,  $\|f - g\|_{\infty} < m$ . Ainsi, en utilisant la seconde inégalité triangulaire, on obtient que pour tout  $x \in \partial\Omega$ ,

$$|\|f(x)\| - \|g(x)\|| \leq \|f(x) - g(x)\| \leq \|f - g\|_{\infty} < m. \quad (13)$$

On déduit alors de (13) et des hypothèses sur  $g$  que  $\|f(x)\| > \|g(x)\| - m \geq 0$ , pour tout  $x \in \partial\Omega$ . D'où  $0_{\mathbb{R}^n} \notin f(\partial\Omega)$ , soit encore,  $f \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$ .  $\square$

Nous adaptons la notion d'homotopie (voir Granas [2, p. 19] ou Krawcewicz et Wu [4, p. 33]) à  $\mathcal{K}(\bar{\Omega})$ .

**Définition 4.4 (Homotopie).** Deux applications  $f, g \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$  sont dites **homotopes** s'il existe une application continue  $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant  $h(t, \cdot) \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$  pour  $t \in [0, 1]$  telle que :

$$h(0, \cdot) = f \quad \text{et} \quad h(1, \cdot) = g.$$

On dira alors que  $h$  est une homotopie de  $f$  à  $g$  (par rapport à  $\bar{\Omega}$ ).

**Exemple 4.5.** Soient  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions définies par  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = 2$ . Alors, l'application  $h : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x),$$

est une homotopie de  $f$  à  $g$ . En effet, ici on a  $\Omega = ]-1, 1[$  donc  $\partial\Omega = \{-1; 1\}$ . De plus, les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues et on a bien  $f(-1) = f(1) = 1 \neq 0$  donc  $f \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$  d'une part, et  $g(-1) = g(1) = 2 \neq 0$  donc  $g \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$  d'autre part. Par définition,  $h(0, \cdot) = f$ ,  $h(1, \cdot) = g$  et, pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $h(t, x) = (1 - t)x^2 + 2t$ . Donc  $h$  est continue sur  $[0, 1] \times [-1, 1]$ , et puisque  $h(t, -1) = h(t, 1) = t + 1 > 0$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors  $h(t, \cdot) \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Nous présentons désormais une définition axiomatique du concept de degré topologique dérivée des travaux de Krawcewicz et Wu [4, pp. 41-42].

**Définition 4.6 (Degré topologique).** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné. On appelle **degré topologique** la famille d'applications  $\deg(\cdot, \Omega) : \mathcal{K}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{Z}$  satisfaisant l'axiomatique suivante :

(A1)  $\deg(Id_{\overline{\Omega}} - x_0, \Omega) = 1$  si  $x_0 \in \Omega$ , et  $\deg(Id_{\overline{\Omega}} - x_0, \Omega) = 0$  sinon (i.e.  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ ), (**normalisation**)

(A2) Soient  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$  deux ouverts tels que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  et  $0_{\mathbb{R}^n} \notin f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , alors

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f|_{\overline{\Omega_1}}, \Omega_1) + \deg(f|_{\overline{\Omega_2}}, \Omega_2), \quad (\text{additivité})$$

(A3) Si  $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et vérifie  $h(t, x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ , pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $x \in \partial\Omega$ , alors  $\deg(h(t, \cdot), \Omega)$  est indépendant de  $t \in [0, 1]$ . (**invariance par homotopie**)

L'entier  $\deg(f, \Omega)$  est alors appelé **degré topologique de l'application  $f$  par rapport à  $\Omega$** .

Nous démontrons maintenant deux propriétés de base des degrés topologiques que nous inférons à partir de l'axiomatique ci-dessus.

**Lemme 4.7.** Soit  $f \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$ . Alors,  $\deg(f, \emptyset) = 0$ .

*Preuve.* Posons  $\Omega_1 = \Omega$  et  $\Omega_2 = \emptyset$ . Alors,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont deux ouverts disjoints vérifiant  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \subset \Omega$ . Or,  $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \Omega \setminus \Omega = \emptyset$  donc  $0_{\mathbb{R}^n} \notin f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)) = \emptyset$ . On en déduit de l'Axiome (A2) de la Définition 4.6 que

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega) + \deg(f, \emptyset).$$

D'où  $\deg(f, \emptyset) = 0$ . □

**Lemme 4.8 (Excision).** Soit  $f \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$ . Si  $\Omega_1 \subset \Omega$  est un ouvert borné tel que  $0_{\mathbb{R}^n} \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ , alors  $\deg(f, \Omega) = \deg(f|_{\overline{\Omega_1}}, \Omega_1)$ .

*Preuve.* En utilisant l'Axiome (A2) de la Définition 4.6 avec  $\Omega_2 = \emptyset$ , on a :  $\deg(f, \Omega) = \deg(f|_{\overline{\Omega_1}}, \Omega_1) + \deg(f, \emptyset)$ . On conclut alors à l'aide du Lemme 4.7. □

À l'aide de ces deux résultats, nous prouvons un résultat important pour la suite :

**Théorème 4.9 (Existence d'un zéro).** Soit  $f \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$ . Si  $\deg(f, \Omega) \neq 0$ , alors il existe un élément  $\bar{x} \in \Omega$ , tel que  $f(\bar{x}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ .

*Preuve.* Par contraposée, on suppose que  $f(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ , pour tout  $x \in \Omega$ . Puisque  $f \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$ , il en vient que  $f(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ , pour tout  $x \in \overline{\Omega}$ , i.e.  $0_{\mathbb{R}^n} \notin f(\overline{\Omega})$ . En appliquant le Lemme 4.8 avec  $\Omega_1 = \emptyset$ , on obtient que  $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \emptyset)$ . D'où, d'après le Lemme 4.7,  $\deg(f, \Omega) = 0$ . □

## 4.2 Théorèmes de point fixe dans $\mathbb{R}^n$

Nous présentons maintenant quelques résultats d'existence de points fixes pour les applications non-linéaires à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Nos preuves se basent essentiellement sur les propriétés homotopiques des degrés topologiques que nous avons présentées à la sous-section précédente.

**Théorème 4.10 (Théorème de point fixe sur  $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$ ).** Soient  $r > 0$  et  $f : \overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, r) \rightarrow \overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$  une application continue. Alors, il existe  $x \in \overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$  tel que  $f(x) = x$ .

*Preuve.* On observe d'abord en posant  $\Omega = \mathcal{B}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$  que si  $f$  possède un point fixe sur  $\partial\Omega$ , la preuve est complète. On suppose alors que  $f(x) \neq x$ , pour  $\|x\| = r$ . On définit l'homotopie  $h : [0, 1] \times \overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$h(t, x) = Id_{\overline{\Omega}}(x) - tf(x).$$

Puisque  $f$  est continue, on déduit que  $h$  l'est aussi. Par ailleurs, par hypothèse,  $h(1, x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ , pour tout  $x \in \partial\Omega$ . De plus, pour  $t \in [0, 1[$ , on a :

$$\|tf(x)\| = t\|f(x)\| \leq tr < \|x\|, \text{ pour tout } x \in \partial\Omega,$$

d'où  $Id_{\overline{\Omega}}(x) \neq tf(x)$ . Par conséquent,  $h(t, \cdot) \in \mathcal{K}(\overline{\Omega})$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Notre homotopie est donc bien définie et d'après l'axiome (A3) de la Définition 4.6, on en déduit que  $\deg(h(0, \cdot), \Omega) = \deg(h(1, \cdot), \Omega)$ , soit encore

$$\deg(Id_{\overline{\Omega}}, \Omega) = \deg(Id_{\overline{\Omega}} - f, \Omega). \quad (14)$$

D'un autre côté, comme  $0_{\mathbb{R}^n} \in \Omega$ , on déduit de l'axiome (A1) de la Définition 4.6 que

$$\deg(Id_{\overline{\Omega}}, \Omega) = 1. \quad (15)$$

Ainsi, en combinant les identités (14) et (15), il vient que  $\deg(Id_{\overline{\Omega}} - f, \Omega) = 1 \neq 0$ . Finalement, puisque  $0_{\mathbb{R}^n} \notin (Id_{\overline{\Omega}} - f)(\partial\Omega)$ , on déduit du Théorème 4.9 le résultat souhaité.  $\square$

Avant de poursuivre, nous formulons l'observation suivante.

**Remarque 4.11.** Si  $K$  est un ensemble de Tchebychev  $K$ , alors pour tout  $x \in K$  on a  $\text{Proj}_K(x) = x$ .

Enfin, à l'aide des résultats précédents, nous prouvons le théorème du point fixe de Brouwer.

**Théorème 4.12 (Théorème du point fixe de Brouwer).** Soit  $K$  une partie compacte, convexe et non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Alors toute application continue  $f : K \rightarrow K$  admet un point fixe.

*Preuve.* Soit  $f : K \rightarrow K$  continue. D'une part, puisque  $K$  est borné, il existe  $r > 0$  tel que  $K \subset \overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$ . D'autre part,  $K$  est fermé et convexe, donc  $K$  est de Tchebychev (voir Théorème 3.6). En notant  $P_K : \overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, r) \rightarrow K$  la restriction à  $\overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$  de l'application  $\text{Proj}_K$  donnée en Définition 3.9, on déduit de la Proposition 3.11 que  $P_K$  est continue. Ainsi, d'après la Proposition 2.9, la composée  $(f \circ P_K) : \overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, r) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$  est continue. Par conséquent, on obtient du Théorème 4.10, l'existence d'un élément  $x^* \in \overline{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^n}, r)$  tel que  $(f \circ P_K)(x^*) = x^*$ , soit encore  $f(P_K(x^*)) = x^*$ . Or  $f$  est à valeurs dans  $K$ , donc  $x^* \in K$  et d'après la Remarque 4.11,  $P_K(x^*) = x^*$ . Finalement  $f(x^*) = x^*$ , ou en d'autres termes  $f$  admet un point fixe sur  $K$ .  $\square$

## 5 Application à l'économie

La théorie de l'équilibre général, inventée par Léon Walras en 1874, est longtemps restée méconnue. Redécouverte vers le milieu du XX<sup>ème</sup> siècle, elle est devenue le corps central de la microéconomie. Gérard Debreu, a joué un rôle déterminant en reformulant la théorie de Walras selon la démarche rigoureuse de la théorie des ensembles en mathématiques. On peut ainsi qualifier d'ensembliste la méthode microéconomique contemporaine. (cf. Poulon [6]). On décrit alors une économie comme un ensemble de biens et un ensemble d'agents (consommateurs) où l'équilibre général correspond à un état dans lequel aucun agent ne souhaite plus échanger aucun bien avec qui que ce soit, chacun étant alors à son "maximum de satisfaction". Le terme **économie d'échange** est un concept utilisé dans la recherche en microéconomie pour décrire l'interaction entre plusieurs agents. Sur le marché, l'agent est le sujet de l'échange et le bien est l'objet de l'échange. Chaque agent apporte sa propre dotation et peut échanger des produits entre eux sur la base d'un système de prix. Dans la littérature, on distingue deux types d'économies d'échanges sont étudiés : les **économies d'échanges pures** et les **économies d'échanges avec production**. Dans le cadre de ce stage, nous nous focalisons sur le cas d'économies d'échanges pures (voir e.g. Yildizoglu [7, Chapitre 15] pour une description complète de ce concept).

**Définition 5.1** (Économie d'échanges pures). On appelle économie d'échanges pures, toute économie dans laquelle tous les agents sont des consommateurs. Il n'y a pas de production et les agents ne peuvent qu'échanger leurs dotations initiales.

Nous nous plaçons dans une économie  $\mathcal{E}$  où la quantité totale de biens est donnée (il n'y a pas de production). Nous avons alors uniquement des consommateurs qui, à partir de leur dotations initiales de biens, procèdent à des échanges en vue d'améliorer leur bien-être.

## 5.1 Position du problème

Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Considérons une économie  $\mathcal{E}$  modélisée par un système de  $n$  consommateurs, chacun doté initialement de quantités fixes de  $m$  biens différents. On suppose ici que les échanges ont lieu parce que chaque consommateur souhaite acquérir un ensemble de biens qui est préféré à sa dotation initiale.

**Remarque 5.2.** Dans le contexte économique, "préféré à sa dotation initiale" signifie que chaque consommateur commence avec une certaine quantité de biens, appelée "dotation initiale". Cependant, ce consommateur préférerait avoir un ensemble différent de biens qui lui apporte plus de satisfaction ou d'utilité. Par conséquent, il participe à des échanges pour obtenir ce nouvel ensemble de biens qu'il trouve plus désirable que ce qu'il possédait initialement.

Supposons qu'un vecteur prix  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}$  soit annoncé. Alors, pour tout ensemble  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^m$  de biens  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ , on appelle valeur marchande de  $\mathbf{c} \in \Omega$ , le produit scalaire :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} = \sum_{i=1}^m p_i c_i = p_1 c_1 + \dots + p_m c_m. \quad (16)$$

Dans la suite, pour chaque consommateur  $j \in [[1, n]]$  et chaque bien  $i \in [[1, m]]$  :

- $w_j^i$  désignera la dotation initiale du consommateur  $j$  pour le bien  $i$ ,
- $x_j^i(\mathbf{p})$  désignera la demande finale du consommateur  $j$  pour le vecteur prix  $\mathbf{p}$ ,
- $w_i = \sum_{j=1}^n w_j^i$  est la dotation totale pour le bien  $i$ ,
- $x_i(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n x_j^i(\mathbf{p})$  est la demande agrégée pour le bien  $i$ ,
- Si nous ajoutons les demandes de tous les consommateurs pour chaque bien  $i$  et soustrayons la dotation initiale totale du bien  $i$ , nous obtenons ce qu'on appelle **la demande nette** du bien  $i$  définie par :

$$g_i(\mathbf{p}) = x_i(\mathbf{p}) - w_i. \quad (17)$$

Ainsi, la **valeur totale de la dotation initiale** du consommateur  $j$  pour le prix  $p$  est  $\mathbf{p} \cdot w_i$  et la **contrainte budgétaire** pour le bien  $i$  est  $\mathbf{p} \cdot w_i = \mathbf{p} \cdot x_i(\mathbf{p})$ .

Avant d'aller plus loin, nous rappelons la loi de Walras qui est fondamentale pour notre travail.

**Théorème 5.3** (Loi de Walras). *Sur l'ensemble des marchés, la somme des demandes nettes est égale à zéro.*

Dans notre cas, on peut retrouver la loi de Walras en sommant les contraintes budgétaires de tous les biens pour l'ensemble de consommateurs. En fait, considérant l'identité (17), on a :

$$\sum_{i=1}^m p_i x_i(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m p_i w_i \iff \sum_{i=1}^m p_i (x_i(\mathbf{p}) - w_i) = \sum_{i=1}^m p_i g_i(\mathbf{p}) = 0 \implies \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{p}) = 0. \quad (18)$$

Nous nous intéressons aux problèmes d'équilibre du type :

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}) : \begin{cases} \text{Trouver} & \mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}, \\ \text{tel que} & g_i(\mathbf{p}^*) \leq 0, \forall i \in [[1, m]]. \end{cases}$$

On appelle **prix d'équilibre** toute solution de  $(\mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ . Nous montrons dans un premier temps une propriété intéressante de ces derniers du point de vue applicatif.

**Lemme 5.4** (Règles des biens gratuits). *Considérons un prix d'équilibre. Si pour un bien, l'offre est strictement supérieure à la demande, alors le prix associé à ce bien est nul.*

*Preuve.* Soit  $\mathbf{p}^* := (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}$ , un prix d'équilibre. D'après le Théorème 5.3, on a :

$$\sum_{i=1}^m p_i^* g_i(\mathbf{p}^*) = 0. \quad (19)$$

Puisque  $g_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$  pour tout  $i \in [[1, m]]$ , on déduit que  $p_i^* g_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$ , pour tout  $i \in [[1, m]]$ . Ainsi, l'équation (19) implique que pour tout  $i \in [[1, m]]$ ,

$$p_i^* g_i(\mathbf{p}^*) = 0. \quad (20)$$

Supposons que pour un bien  $i_0 \in [[1, m]]$ , on ait  $g_{i_0}(\mathbf{p}^*) < 0$ . Alors, d'après (20), on a  $p_{i_0}^* = 0$ .  $\square$

## 5.2 Existence d'un prix d'équilibre pour un problème auxiliaire

Nous étudions l'existence de prix d'équilibre pour  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ . Pour ce faire, nous introduisons le **simplexe des prix**  $\Delta^{m-1}$  (ou **simplexe unité de  $\mathbb{R}^m$** , en mathématiques) en vu de normaliser les prix.

**Définition 5.5** (Simplexe unité de  $\mathbb{R}^m$ ). *Soit  $m \in \mathbb{R}^m$ . On appelle **simplexe unité** de  $\mathbb{R}^m$  le sous-ensemble  $\Delta^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$  de dimension  $(m-1)$  défini par*

$$\Delta^{m-1} := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \text{ et } x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0\}.$$

**Remarque 5.6.** *Le simplexe unité  $\Delta^{m-1}$  est convexe et compact.*

Ainsi, nous étudions le problème d'équilibre suivant:

$$(\mathcal{P}_{\Delta^{m-1}}) : \begin{cases} \text{Trouver} & \mathbf{p}^* \in \Delta^{m-1}, \\ \text{tel que} & g_i(\mathbf{p}^*) \leq 0, \forall i \in [[1, m]]. \end{cases}$$

Enfin, nous montrons l'existence d'une solution pour  $(\mathcal{P}_{\Delta^{m-1}})$  sous certaines conditions topologiques et géométriques.

**Théorème 5.7** (Existence d'un prix d'équilibre). *Supposons que :*

- (a) *pour tout  $i \in [[1, m]]$ ,  $g_i$  est continue sur  $\Delta^{m-1}$  ;*
- (b) *pour tout  $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \Delta^{m-1}$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i g_i(\mathbf{p}) = 0$ .*

*Alors,  $(\mathcal{P}_{\Delta^{m-1}})$  admet un prix d'équilibre.*

*Preuve.* Nous commençons par introduire la fonction continue  $\varphi$  définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \Delta^{m-1} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{p} &\mapsto \varphi_i(\mathbf{p}) = p_i + \max\{0, g_i(\mathbf{p})\}. \end{aligned}$$

On observe que  $\varphi(\mathbf{p}) \neq 0_{\mathbb{R}^m}$  puisque pour tout  $i \in [[1, m]]$ ,  $\varphi_i(\mathbf{p}) \geq p_i + g_i(\mathbf{p})$ . Ainsi, en appliquant le Théorème 5.3 et en gardant en tête que  $\mathbf{p} \in \Delta^{m-1}$ , on a :

$$\mathbf{p} \cdot \varphi(\mathbf{p}) \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot g(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} > 0.$$

En faisant cela, on peut construire la fonction  $f$  définie par

$$\begin{aligned} f : \Delta^{m-1} &\rightarrow \Delta^{m-1} \\ \mathbf{p} &\mapsto f_i(\mathbf{p}) = \frac{p_i + \max\{0, g_i(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(\mathbf{p})\}}. \end{aligned} \tag{21}$$

D'après la Remarque 5.6, on a construit une application continue  $f$  sur un convexe compact non vide de  $\mathbb{R}^{m-1}$ . Posons pour tout  $\mathbf{p} \in \Delta^{m-1}$  :

$$\lambda_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(\mathbf{p})\}.$$

Ainsi, d'après le Théorème 4.12, il existe  $\mathbf{p}^* \in \Delta^{m-1}$  tel que  $f(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$ . En d'autres termes, il existe  $\mathbf{p}^* \in \Delta^{m-1}$  tel que pour tout  $i \in [[1, m]]$ , on ait :

$$\lambda_{\mathbf{p}^*} \mathbf{p}_i^* = \max\{0, g_i(\mathbf{p}^*)\}. \tag{22}$$

Supposons que  $\lambda_{\mathbf{p}^*} > 0$ . Alors  $\max\{0, g_i(\mathbf{p}^*)\} > 0$ , d'où  $g_i(\mathbf{p}^*) > 0$  et donc  $\mathbf{p}^* \cdot g(\mathbf{p}^*) \neq 0$ , ce qui contredit le Théorème 5.3. Maintenant, dans le cas où  $\lambda_{\mathbf{p}^*} = 0$ , on a  $\max\{0, g_i(\mathbf{p}^*)\} = 0$ , ce qui implique que

$$g_i(\mathbf{p}^*) \leq 0, \text{ pour tout } i \in [[1, m]].$$

Ainsi,  $\mathbf{p}^*$  est solution de  $(\mathcal{P}_{\Delta^{m-1}})$ . □

## 6 Conclusion

Nous achevons ce rapport avec quelques mots sur le déroulé du stage.

## Résumé du travail réalisé

Durant ce stage, nous avons pu étudier le théorème de point fixe de Brouwer grâce à de résultats topologiques préalablement établis. Nous avons ensuite pu discuter d'un problème d'équilibre et montré un résultat d'existence pour ce dernier.

## La structure d'accueil

J'ai réalisé mon stage de L3 au sein de l'unité de recherche (UR1 1) nommée laboratoire de Mathématiques Informatique et Applications, ou LAMIA, de l'Université des Antilles. Le LAMIA compte environ 50 membres dont des permanents (essentiellement les Professeurs des universités et les Maîtres de conférence) et des non-permanents (typiquement les ATER et les doctorants). Ce laboratoire s'organise en divers groupes thématiques dont certains dédiés aux mathématiques (comme le groupe CAVA), d'autres en informatique (comme le groupe IMAG<sup>2</sup>) et d'autres transdisciplinaires (comme le groupe Modélisation). Concernant les mathématiques, les travaux des chercheurs du LAMIA s'axent autour de l'analyse des équations aux dérivées partielles non-linéaires, du contrôle, de l'optimisation, de la modélisation, des problèmes inverses et de la topologie générale.

## Mes impressions sur le métier de chercheur

Ce stage m'aura permis de mieux appréhender le travail d'un chercheur, qui se décompose en plusieurs phases : documentation, recherche d'idées, structuration de l'article, mise en forme, travail bibliographique. J'ai pu saisir l'importance d'avoir une bonne compréhension de l'anglais, langue internationale pour l'écriture des journaux scientifiques. Dans l'ensemble, j'ai aimé me mettre à la place d'un chercheur, et la découverte de la topologie algébrique et de ses nombreux enjeux n'a fait que renforcer mon attrait pour les mathématiques.

Je tiens à remercier mon tuteur, le Dr. James Larrouy, avec qui j'ai passé un agréable stage. Il a su notamment me montrer l'importance de la forme d'un article scientifique, et de la rigueur dans sa rédaction.

## References

- [1] DEUTSCH, F. (2001). Best approximation in inner product spaces (Vol. 7). New York: Springer.
- [2] GRANAS, A. (1962). The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces (I).
- [3] HIRIART-URRUTY, J. B. (2013). Optimisation et analyse convexe. EDP sciences.
- [4] KRAWCEWICZ, W., & WU, J. (1997). Theory of Degrees With Applications to Bifurcations and Differential Equations, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts.
- [5] NASH, J. F. (2024). Non-cooperative games. In The Foundations of Price Theory Vol 4 (pp. 329-340). Routledge.
- [6] POULON, F. (2015). TD Economie générale, 2e édition.
- [7] YILDIZOGLU, M. (2014). Introduction à la microéconomie. Université de Bordeaux.